

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 febbraio 1920.

R. LANCIANI, Socio anziano, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli incroci delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili.* Nota del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrisp. F. ENRIQUES.

1. Sia data un'equazione algebrica

$$f(xyz) = 0$$

di grado n in z , la quale definisce così z come funzione ad n valori del punto (xy) ; e sia

$$D(xy) = 0$$

la curva di diramazione ad essa relativa. La curva D si comporrà in generale di più curve irriducibili; e noi supporremo che due di tali curve, a e b , o (ciò che differenzialmente è equivalente) due rami lineari di una stessa curva, s'incrocino in un punto P_o , per cui passino semplicemente e con tangenti distinte. Si tratta qui di esaminare le sostituzioni A e B , secondo cui si permutano i valori della funzione algebrica z , in relazione alle due curve a e b , nell'intorno del punto P_o .

Precisamente faremo vedere che le due sostituzioni A e B sono permutabili fra loro ⁽¹⁾, generando un gruppo abeliano. E in una seconda nota

⁽¹⁾ In un'altra nota vedremo che cosa succede se le a e b si toccano: allora — nell'ipotesi di un contatto r -punto — le A e B risultano permutabili con $(BA)^r$; e quindi si deduce il contatto di a e b note che siano A e B .

potremo dedurre gli sviluppi in serie che danno la rappresentazione analitica di una falda della superficie $f(xyz) = 0$, nell'intorno di un punto che corrisponda a un incrocio di due curve di diramazione.

E giova qui dire che la singolarità delle superficie, che risponde al tipo sopra caratterizzato, ha importanza per la teoria generale, poichè a questo tipo di incroci può ridursi ogni singolarità puntuale di una superficie, mediante trasformazioni quadratiche dello spazio, come mostreremo in un altro lavoro di prossima pubblicazione.

2. Sia dunque P_o un punto d'incrocio di due curve di diramazione a e b (o di due rami lineari) facenti parte della $D(xy) = 0$, e passanti per esso con tangentи distinte; e siano $x_o = 0, y_o = 0$, le sue coordinate.

Mettendo in evidenza le parti reali e immaginarie delle due variabili complesse x e y , poniamo

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2,$$

dove ora x_1, y_1, x_2, y_2 , sono variabili reali.

Ogni punto di coordinate reali o complesse del piano (xy) verrà rappresentato da un punto dello spazio a quattro dimensioni Σ , i cui punti sono definiti dalla quaterna di coordinate $(x_1 x_2 y_1 y_2)$; e, in particolare, al punto P_o risponderà in Σ il punto O di coordinate $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$.

Alla curva di diramazione $D(xy) = 0$, corrisponderà una superficie \mathcal{A} , la quale passerà per O con due falde, \mathcal{A}_a e \mathcal{A}_b , corrispondenti rispettivamente alle due componenti a e b della curva D.

Nello spazio Σ considereremo esclusivamente i punti soddisfacenti alla disuguaglianza

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < h^2,$$

cioè i punti interni ad una ipersfera Ω di centro O e di raggio h , nella quale la superficie \mathcal{A} si componga solamente delle due falde \mathcal{A}_a e \mathcal{A}_b , e queste vi restino distinte ed abbiano come solo punto comune il punto O.

Sia ora H un punto generico di Σ , interno all'ipersfera Ω : ad esso corrisponderanno, in virtù dell'equazione $f(xyz) = 0$, n valori di $z: z_1, z_2, z_3 \dots z_n$, che saranno distinti fra loro.

Facciamo descrivere ad H una linea chiusa Γ_a che avvolga una volta la superficie \mathcal{A}_a : una tale linea si può ottenere prendendo un piano per H che intersechi la \mathcal{A}_a in un punto Q, e prendendo in questo un cappio uscente da H ed avvolgente il punto Q e questo solo. Accanto a questo cappio si può considerare ogni altro da esso ottenuto per continuità, senza incontrare nessun altro punto della \mathcal{A}_a o della \mathcal{A}_b .

Quando H descrive in un senso determinato il cappio Γ_a , ritornando in sè stesso, gli n valori $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ si permuteranno secondo una certa sostituzione che indichiamo con A. Similmente indichiamo con B la sosti-

tuzione che si ottiene facendo descrivere ad H un cappio Γ_b , il quale avvolga una volta la superficie \mathcal{A}_b . Vogliamo dimostrare che, nella nostra ipotesi, le due sostituzioni A e B sono fra loro permutabili.

A tale oggetto si consideri sopra la superficie \mathcal{A}_a una linea chiusa e senza nodi, L_a , la quale avvolga il punto O , e si consideri una varietà V a tre dimensioni (senza singolarità nell'intorno di O) contenente L_a , il punto H , ma non altri punti i \mathcal{A}_a : questa varietà interesserà \mathcal{A}_b secondo una linea L_b .

La regione di V , interna all'ipersfera Ω , è topologicamente identica al nostro spazio e possiamo quindi senz'altro supporre che sia una regione di esso.

La linea chiusa L_a potremo ridurla a un cerchio, e la linea L_b , la quale ha un punto comune con la regione di \mathcal{A}_a interna a L_a , avrà anche un punto comune con la regione di piano interna al cerchio L_a , e quindi, considerando solo la parte di essa prossima a detto cerchio, potremo ridurla ad un segmento intersecante l'interno del cerchio in un punto R .

A maggior chiarimento di una simile deduzione, può convenire un esame analitico. Con una trasformazione del piano (xy) regolare nell'intorno del punto $P_0 = (00)$, la quale lascia quindi invariati i caratteri topologici degli enti che ci interessano, possiamo ridurre le due curve a e b ad essere rappresentate da

$$y = 0, \text{ e } x = 0 \quad (1);$$

sicchè la superficie \mathcal{A}_a è un piano di equazioni

$$y_1 = y_2 = 0,$$

e la \mathcal{A}_b un altro piano di equazioni

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Prendiamo come varietà V la quadrica

$$y_1 + y_2 = \left(x_1 - \frac{h}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{h}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

e facciamone la proiezione stereografica dal punto all'infinito dell'asse y_2 , sopra lo spazio a tre dimensioni ($x_1 x_2 y_1$); allora l'intersezione di V con il piano \mathcal{A}_a viene proiettata nel cerchio.

$$y_1 = 0, \quad \left(x_1 - \frac{h}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{h}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

(1) Se $y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ è lo sviluppo del ramo a , ed $y = b_1 x + b_2 x^2 \dots$ è lo sviluppo del ramo b , ($a_1 \neq b_1$), la trasformazione richiesta è:

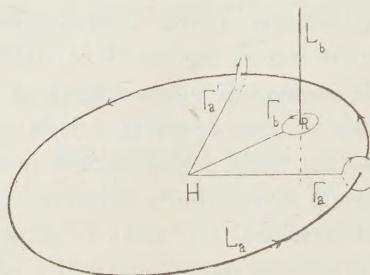
$$\begin{aligned} y' &= y - a_1 x - a_2 x^2 \dots, \\ x' &= y - b_1 x - b_2 x^2 \dots. \end{aligned}$$

e l'intersezione di V con il Δ_b viene proiettata nell'asse y_1 , cioè nella retta

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

la quale è perpendicolare al piano del cerchio e risulta a questo interna.

Essendoci così ridotti a uno spazio a tre dimensioni, riferiamoci all'unica figura. Prendiamo come origine dei cappi il punto H , centro del cerchio L_a , e come cappi Γ_a e Γ_b avvolgenti le falde Δ_a e Δ_b , i cappi segnati, i quali avvolgono le linee L_a e L_b (appartenenti rispettivamente a Δ_a e Δ_b) nel senso indicato. Oltre a questi due cappi, si consideri anche il cappio Γ'_a , che avvolge la L_a . Facciamo ora variare il cappio Γ_a , sino



a farlo coincidere con Γ'_a , e ciò ruotando il piano verticale che lo contiene (perpendicolare al piano orizzontale contenente L_a) intorno all'asse del cerchio L_a , in modo che il centro del cerchietto che forma il cappio descriva la L_a nel senso indicato dalla freccia. In questo passaggio il cappio viene a tagliare la retta L_b , e si riconosce immediatamente, dalla figura, che il cappio Γ'_a è equivalente alla somma $\Gamma_b^{-1} + \Gamma_a + \Gamma_b$.

Segue che al cappio L'_a corrisponde una sostituzione

$$A' = B A B^{-1}.$$

Ma, d'altra parte, il cappio Γ'_a è equivalente al cappio Γ_a , potendosi ridurre a questo senza incontrare L_a né L_b , ove si faccia ruotare il piano verticale, che lo contiene, intorno all'asse del cerchio L_a , nel senso indicato dalla freccia. Si ha dunque

$$A' = A,$$

e quindi

$$A = B A B^{-1};$$

cioè le sostituzioni A e B sono permutabili fra loro, come volevamo dimostrare.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota I di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Ho mostrato, in uno studio precedente (¹), che il problema dei piccoli moti ondosi in un canale a fondo rettilineo di profondità h , si può far dipendere dalla integrazione della seguente equazione :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ f(t; z + ih) + f(t; z - ih) \right\} + ig \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(t; z + ih) - f(t; z - ih) \right\} = 0,$$

differenziale, lineare, del secondo ordine e alle differenze finite, nella funzione f dell'argomento reale t (tempo) e della variabile complessa $z = x + iy$. Questa funzione nella dipendenza da z (e per qualunque t) è olomorfa nella striscia della variabile complessa stessa compresa tra le rette $y = -h$ e $y = h$, e inoltre dev'essere reale sull'asse reale $y = 0$. La costante g è positiva (valore dell'accelerazione di gravità). Viceversa, a ogni integrale della equazione precedente, che soddisfi alle condizioni specificate, corrisponde un moto ondoso dinamicamente possibile; da ciò deriva la denominazione di *caratteristica* attribuita all'equazione stessa.

Si tratta ora di saggiare un metodo per la sua integrazione. Per maggiore semplicità converrà assumere $h = 1$, con che l'equazione in discorso diviene

$$(I) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ f(t; z + i) + f(t; z - i) \right\} + ig \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(t; z + i) - f(t; z - i) \right\} = 0.$$

Naturalmente la f va ora considerata nella striscia $-1 \leq y \leq 1$.

2. Si immagini di applicare alla incognita funzione $f(t; z)$ lo sviluppo di Mac-Laurin in serie di potenze di t ; si ha

$$(1) \quad f(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z),$$

avendo posto per brevità

$$f_0(z) = f(0; z), \quad f_n(z) = \left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right)_{t=0} \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

(¹) Cisotti, *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità* [questi Rendiconti, vol. XXVII (1918), Nota I, pp. 255-259 e Nota II, pp. 312-316].

Dalla (1), mediante due successive derivazioni, si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t; z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_{n+2}(z).$$

Per questa e per la (1) l'equazione caratteristica (I) può scriversi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ f_{n+2}(z+i) + f_{n+2}(z-i) + ig \frac{\partial}{\partial z} [f_n(z+i) - f_n(z-i)] \right\} = 0.$$

È questa soddisfatta per qualunque t , assumendo i coefficienti f_n dello sviluppo (1) in guisa da soddisfare alle seguenti relazioni:

$$f_{n+2}(z+i) + f_{n+2}(z-i) + ig \frac{\partial}{\partial z} [f_n(z+i) - f_n(z-i)] = 0, \\ (i = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Sono queste equazioni lineari, alle sole differenze finite, che notoriamente determinano ⁽¹⁾ le funzioni f_n per $n \geq 2$ quando sieno note f_0 e f_1 .

3. Vediamo ora, in modo preciso, come si possono determinare le funzioni f_n mediante f_0 e f_1 . Chiamo φ_n e ψ_n la parte reale e il coefficiente dell'unità immaginaria di f_n , con che

$$f_n(z) = \varphi_n(x, y) + i\psi_n(x, y).$$

Dovendo essere f_n reale per $y = 0$, si ha, riferendosi in particolare ai punti della retta $y = 1$,

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \left\{ f_n(x+i) + f_n(x-i) \right\}, \quad \psi_n = \frac{1}{2i} \left\{ f_n(x+i) - f_n(x-i) \right\};$$

per cui le (2), riferite all'asse reale, cioè per $z = x$, divengono

$$(3) \quad \varphi_{n+2} - g \frac{\partial}{\partial x} \psi_n = 0, \quad \text{per } y = 1.$$

Ora è

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \operatorname{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) dx_1,$$

se si ammette che $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}$ sia funzione dei punti della retta $y = 1$, continua al finito e dotata di limite superiore finito anche al crescere indefinito dell'argomento ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. ad es. Pascal, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. Parte III: *Calcolo delle variazioni e delle differenze finite* [Manuali Hoepli (1918), 2^a edizione, pag. 297].

⁽²⁾ Levi-Civita, *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini* [questi Rendiconti, vol. XX (1911), pag. 293, formula (I) e pag. 381, ipotesi a)].

Per la precedente, la (3) può scriversi

$$(4) \quad \varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \operatorname{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) dx_1, \text{ per } y = 1.$$

Noti i valori che φ_n assume nei punti della retta $y = 1$, questa formula fornisce i valori che nei punti della stessa retta assume la parte reale della funzione f_{n+2} . Con ciò e per il fatto che f_{n+2} dev'essere reale per $y = 0$, la funzione stessa risulta definita nei punti interni della striscia $-1 \leq y \leq 1$ mediante la formula seguente ⁽¹⁾:

$$(5) \quad f_{n+2}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n+2} \frac{dx}{\operatorname{Ch} \frac{\pi}{2} (x - z)}.$$

4. Da quanto precede risulta che i coefficienti $f_n(z)$ dello sviluppo (1) della funzione $f(t; z)$ risultano determinati per mezzo delle formule (4) e (5) quando sieno assegnati i valori che φ_0 e φ_1 assumono nei punti della retta $y = 1$; precisamente le f_n con n pari dipendono in definitiva dai valori di φ_0 e le f_n con n dispari dai valori di φ_1 . Converrà pertanto mettere in rilievo nello sviluppo (1) questa dipendenza separata, scrivendo

$$(1') \quad f(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} f_{2n}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z).$$

L'assegnazione dei valori di φ_0 e φ_1 nei punti della retta $y = 1$ dipende dalle circostanze iniziali del problema ondoso. Così ad esempio nel caso delle *onde di emersione* (impulsi iniziali nulli) è $\varphi_0 = 0$: in tali ipotesi è facile il riconoscere essere nulle tutte le f_n con n pari, per cui nella (1') scompare la prima serie e rimane

$$(1'') \quad f(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z),$$

nella quale i coefficienti f_{2n+1} dipendono in definitiva dai valori della sola φ_1 sopra $y = 1$; com'è noto, questi valori definiscono la conformazione iniziale del pelo libero. In una prossima Nota, trattando della forma delle onde di emersione, verrà messa in evidenza la equiconvergenza della serie sotto convenienti condizioni.

(1) Palatini, *Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, vol. XXXIX (1915), pag. 373, formula (12)].

Matematica. — *A propos de la notion de parallélisme dans une variété quelconque.* Nota di J. PÈRES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Étant donnée une variété à n dimensions V_n , dont l'élément linéaire est $\Sigma b_{ik} dx_i dx_k$, on connaît les propriétés d'invariance de la forme

$$J = \Sigma (ij, kl) dx_i \delta x_j \alpha x_k \delta x_l,$$

où interviennent les symboles à quatre indices de Riemann. M.^r Levi-Civita obtient, dans son Mémoire *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc., une définition de J qui en met en évidence, sans calculs, le caractère invariant (¹); il met en relief, dans la note critique qui termine ce Mémoire, une difficulté d'interprétation du passage où Riemann (²) a lui aussi en vue la caractérisation invariante de J . Je reviens ici sur l'interprétation du passage de Riemann.

2. Voici d'abord le fragment en question: « formetur expressio

$$R = \delta^2 \Sigma b_{ik} dx_i dx_k - 2d\delta \Sigma b_{ik} dx_i \delta x_k + d^2 \Sigma b_{ik} \delta x_i \delta x_k$$

determinatis variationibus secundi ordinis $\delta^2, d\delta, \delta^2$ ita, ut sit

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' \Sigma b_{ik} dx_i \delta x_k - \delta \Sigma b_{ik} dx_i \delta' x_k - d \Sigma b_{ik} \delta x_i \delta' x_k = 0 \\ \delta' \Sigma b_{ik} dx_i dx_k - 2d \Sigma b_{ik} dx_i \delta' x_k = 0 \\ \delta' \Sigma b_{ik} \delta x_i \delta x_k - 2\delta \Sigma b_{ik} \delta x_i \delta' x_k = 0, \end{array} \right.$$

denotante δ' variationem quamcumque. Quo pacto haec expressio invenietur $= J$. Puis « ex hac formatione hujus expressionis sponte patet, mutatis variabilibus independentibus transmutari eam in expressionem a nova forma ipsius $\Sigma b_{ik} dx_i dx_k$ eadem lege dependentem ».

3. La détermination des différentielles seconde, à partir des équations (1), est immédiate: on trouve les expressions mêmes qu'introduit, grâce à la théorie du parallélisme, M.^r Levi-Civita. Mais si l'on adopte alors, pour les différentielles troisièmes, les valeurs qui en résultent (³), on trouve (⁴), non pas

$$R = J$$

(¹) Bend. Circ. Palermo, t. 42, 1917, pp. 196-198. Cfr. pour une interprétation géométrique de J et de la contrevariance des $u^{(i)}$, ma Note (Rend. Lincei, 15 juin 1919).

(²) *Commentatio mathematica* ecc. (Ges. Werke, p. 380 et suiv.).

(³) Levi-Civita, loc. cit. (¹), p. 196.

(⁴) Id., ibid., p. 202.

comme l'annonce Riemann, mais

$$R = 0$$

c'est la difficulté annoncée.

4. Nous vérifierons d'abord que le résultat de Riemann s'explique dans l'hypothèse, évidemment inadmissible du point de vue de la théorie du parallélisme, que les différentielles troisièmes sont indépendantes de l'ordre des différentiations⁽¹⁾.

Il est inutile de refaire le calcul, car en posant

$$R = R_1 + R_2$$

et en groupant dans R_2 les termes qui contiennent des différentielles troisièmes, on a

$$\begin{aligned} R_2 &= 2 \sum b_{ik} dx_i \delta^k dx_k - \\ &- 2 \sum b_{ik} dx_i d\delta^k x_k - 2 \sum b_{ik} d\delta dx_i dx_k + 2 \sum b_{ik} d^2 \delta x_i dx_k \end{aligned}$$

d'où, puisque

$$\delta dx_i = d\delta x_i,$$

$$R_2 = 2 \sum b_{ik} dx_i (\delta d\delta x_i - d\delta \delta x_k),$$

c'est-à-dire⁽²⁾

$$R_2 = 2 \sum (ij, kl) dx_j \delta x_i dx_k \delta x_k;$$

d'où, puisque R est nul,

$$R_1 = -2 \sum (ij, kl) dx_i \delta x_j dx_k \delta x_k.$$

Si l'on remarque que les symboles (ij, kl) de Riemann diffèrent des symboles correspondants de M^r. Levi-Civita, précisément par le facteur — 2, on voit que, en adoptant les notations de Riemann, il vient

$$R_1 = J.$$

En faisant, sur les différentielles troisièmes, l'hypothèse indiquée au début de ce paragraphe, on trouve évidemment

$$R = R_1 = J$$

comme nous l'avions annoncé.

5. Le calcul précédent rattache, très simplement, le résultat de Riemann à celui de M^r. Levi-Civita. La différence provient de valeurs différentes attribuées aux différentielles troisièmes.

Le calcul de Riemann est d'ailleurs légitime: ce n'est pas par un hasard heureux que R , calculé comme nous l'indiquions, se trouve être un

(1) Cette remarque est aussi faite par Weber (2^e édition des Oeuvres). Ni Riemann, ni Weber ne précisent d'ailleurs les valeurs à attribuer aux différentielles troisièmes.

(2) Lévi-Civita, loc. cit., formules (33), (34), (34').

invariant. Cela provient au fond de ce que l'hypothèse du n. 4 est invariante par un changement de variable.

Il est d'ailleurs aisé de préciser les valeurs à attribuer aux différentielles troisièmes invariantes, conformément aux vues de Riemann⁽¹⁾. Nous le verrons dans la suite, en employant d'abord un procédé indirect, mais qui m'a paru bien marquer l'égale légitimité des deux points de vue. Cela met d'ailleurs en évidence l'originalité des vues de M.^r Levi-Civita et l'avantage de ses conceptions.

6. Revenons d'abord sur la définition de R. Soient donnés, en un point déterminé P de la variété considérée, un certain nombre d'éléments linéaires infiniment petits: dx correspondant aux accroissements des variables dx_1, dx_2, \dots, dx_n (nous nommerons ces accroissements coordonnées de l'élément par rapport aux variables x_i); δx ayant pour coordonnées $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$; etc. On pourra en déduire les symboles $d\delta, \delta d\delta$ etc., si l'on a défini, en un point quelconque M de la variété, les éléments linéaires qui seront considérés comme congruents respectivement à $dx, \delta x, \dots$; il est essentiel que cette définition soit indépendante du système de référence (x_i) choisi dans V_n. Ceci fait, étant donné un invariant formé à l'aide des éléments $dx, \delta x, \dots$ (par exemple $\sum b_{ik} dx_i \delta x_k$), on pourra le différentier et en déduire, par différentiation, de nouveaux invariants: c'est ainsi qu'est formé R.

Pour définir, au point M, l'élément linéaire congruent à un élément donné, on peut d'abord utiliser la translation de M.^r Levi-Civita⁽²⁾. Comme une telle translation ne change ni les longueurs, ni les angles, il est bien clair qu'en adoptant la définition correspondante des différentielles successives, il vient

$$\delta^2 \sum b_{ik} dx_i dx_k = 0 \quad d\delta \sum b_{ik} dx_i \delta x_k = 0,$$

c'est-à-dire

$$R = 0.$$

7. Mais on peut aussi procéder de la façon suivante, et cela revient au point de vue de Riemann.

Admettons que les coordonnées du point P soient $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, et soient y_1, y_2, \dots, y_n les variables géodésiques d'origine P et correspondantes à x_1, x_2, \dots, x_n ; on a

$$(2) \quad x_i = y_i - \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} y_\lambda y_\mu - \dots \quad (3).$$

⁽¹⁾ En abandonnant, naturellement, l'artifice bien inutile qu'est l'introduction des équations (1). Rappelons la définition des différentielles invariantes: leurs valeurs doivent être déterminées à partir des coefficients de la forme $\sum b_{ik} dx_i dx_k$, et telles qu'après changement de variables elles gardent même expression à partir des nouveaux coefficients.

⁽²⁾ Il importe de fixer alors le chemin suivi de P à M.

⁽³⁾ Les symboles de Christoffel sont calculés au point P par rapport à la forme $\sum b_{ik} dx_i dx_k$. Pour la définition des variables géodésiques, cf. Riemann, loc. cit., p. 261.

L'élément linéaire dx admet au point P, par rapport aux variables y_i , les coordonnées

$$dy_i = dx_i.$$

Nous définirons l'élément congruent au point M comme ayant, par rapport aux variables y_i , les mêmes coordonnées; on aura, en distinguant ces coordonnées par l'indice M,

$$(dy_i)_M = dy_i = dx_i$$

et, en revenant aux variables x_i , les coordonnées de l'élément congruent seront

$$(dx_i)_M = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} (dy_k)_M = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dx_k \quad (1).$$

La définition précédente de vecteurs congruents en P et en M est bien indépendante du choix des variables. Le calcul direct est aisé, mais c'est immédiat si l'on interprète les y_i comme coordonnées cartésiennes d'une variété euclidienne que l'on peut déduire de V_n de la façon suivante (*): laissant fixe P et son voisinage du premier ordre, on applique les géodésiques issues de P sur leurs tangentes en P, avec conservation des arcs. Dans ces conditions les deux éléments congruents dx et $(dx)_M$ auront pour images deux éléments égaux et parallèles de l'espace euclidien.

La définition précédente de la congruence entraîne immédiatement, en P,

$$(3) \quad \begin{cases} d\delta x_i = \sum_{kr} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_r} dx_k \delta x_r, \\ d'd\delta x_i = \sum_{krs} \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_k \partial y_r \partial y_s} dx_k \delta x_r d'x_s, \text{ etc. } (3), \end{cases}$$

valeurs évidemment invariantes et indépendantes de l'ordre des différentiations. On en déduira donc le résultat de Riemann

$$R = J.$$

8. Ajoutons ici une remarque. Étant donné au point P un vecteur contrevariant $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)}$, les résultats du n.^o 7 permettent de lui faire correspondre (par congruence) un vecteur contrevariant $(\xi^{(1)})_M, \dots (\xi^{(n)})_M$ d'origine M; on a les formules

$$(4) \quad (\xi^{(i)})_M = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \xi^{(k)}.$$

(1) Les dérivées partielles étant calculées au point M.

(*) Severi, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 42, p. 253.

(3) Les seconds membres sont faciles à exprimer à l'aide des symboles de Christoffel. Les différentielles ainsi définies sont liées assez simplement à celles de M.^r Levi-Civita. On vérifiera par exemple que la différentielle $d'd\delta x_i$, donnée par la formule (3), est la moyenne arithmétique des trois différentielles $d'd\delta x_i, d\delta d'x_i, d\delta' d x_i$ de M.^r Levi-Civita.

Les propriétés de l'opération qui fait passer de $\xi^{(i)}$ à $(\xi^{(i)})_M$ sont à coup sûr moins simples que celles de la translation de Levi-Civita: les longueurs et les angles de vecteurs concourants ne sont pas conservés. Mais, au voisinage du point P, les deux opérations coïncident: si en effet les coordonnées de M sont $dx_1, \dots dx_n$, les relations (4) et (2) donnent immédiatement, pour les variations correspondantes des $\xi^{(i)}$, les valeurs

$$d\xi^{(i)} = - \sum_i \lambda^\mu dx_\lambda \xi^{(\mu)}.$$

Ce sont les formules de M.^r Levi-Civita.

9. Si nous n'avions pas eu en vue de préciser la définition de R, nous pouvions parvenir plus vite aux formules (3). Il suffit de prendre les valeurs des différentielles invariantes à définir, nulles pour un système de variables géodésiques d'origine P. Elles seront alors nulles pour tout autre système y_i de variables géodésiques ⁽¹⁾; ce qui conduit immédiatement aux formules (3) pour leurs valeurs en coordonnées quelconques. Il me semble que c'est la façon la plus simple d'obtenir les valeurs des différentielles invariantes $d\delta x$, dont on sait l'importance.

Matematica. — Sur un théorème de Liapounoff. Nota di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Envisageons un corps K limité par une surface S qui possède, en chaque point, une normale déterminée, dont les cosinus directeurs sont des fonctions continues du point. Envisageons l'intégrale

$$(1) \quad J = \frac{1}{2} \int \frac{dx dy dz dx' dy' dz'}{r}$$

étendue à tous les couples de points $x, y, z; x', y', z'$ du corps K, r étant la distance des deux points. D'après Liapounoff ⁽²⁾, parmi tous les corps K de même volume V la sphère possède le maximum absolu de l'intégrale (1). Il n'y a pas d'ailleurs d'autre maximum relatif.

Liapounoff se sert, pour parvenir à ce résultat, des méthodes de la théorie du potentiel newtonien en envisageant une certaine couche électrique sur la surface S du corps. Il suppose établi le théorème, d'après lequel, parmi tous les corps de même volume V, c'est la sphère dont la surface possède la plus petite aire. On sait que ce théorème n'a été démontré que récemment

⁽¹⁾ Parceque la relation entre deux systèmes de variables géodésiques d'origine P est à coefficients constants.

⁽²⁾ Cfr. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, 1902.

d'une manière satisfaisante au point de vue de la rigueur et dans des suppositions assez générales ⁽¹⁾.

Nous avons démontré le théorème de Liapounoff concernant le maximum absolu de la sphère pour des corps tout à fait généraux, sans faire appel à des considérations étrangères au théorème et sans introduire des grandeurs étrangères au théorème, comme l'aire de la surface du corps.

2. Nous envisageons dans l'espace R_3 un ensemble borné E mesurable au sens de M. Lebesgue. À cet ensemble correspond, dans l'espace à six dimensions $x, y, z; x', y', z'$ un ensemble mesurable E^{**} , dans lequel la fonction $\frac{1}{r}$ est sommable. On peut définir le potentiel newtonien de l'ensemble E comme l'intégrale (1) étendue à E^{**} ; et son énergie potentielle, comme le négatif de cette intégrale.

Formons une suite de divisions D_1, D_2, \dots de l'espace R_3 en cubes K_i^1, K_i^2, \dots de côtés $\frac{1}{1^1}, \frac{1}{2^2}, \dots$. Envisageons les sommes

$$(2) \quad \sum_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j, i \neq j} \frac{m(e_i^k) m(e_j^k)}{r_{ij}^k},$$

$m(e_i^k)$ étant la mesure de points de E contenus dans le i^{me} cube de la k^{me} subdivision D_k ; r_{ij}^k est la distance des milieux du i^{me} et du j^{me} cube et la sommation est étendue à tous les couples de valeurs i, j tels que $i \neq j$.

Remplaçons les ensembles de points de E contenus dans les cubes K_i^k par des parallélépipèdes \bar{K}_i^k concentriques aux cubes K_i^k , de même base et parallèle à celle de K_i^k et de volume égal à $m(e_i^k)$. Les sommes

$$(3) \quad \overline{\sum}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j, i \neq j} \iint \frac{dx dy dz dx' dy' dz'}{r_{ij}^k},$$

r_{ij}^k désignant maintenant la distance de deux points variables P et Q des parallélépipèdes \bar{K}_i^k, \bar{K}_j^k , tendent vers la même limite que les sommes (2), et cette limite est égale à la valeur J de l'intégrale (1).

D'après un théorème connu de M. Fubini ⁽²⁾, l'intégrale (1) est égale à l'intégrale

$$(4) \quad J = \frac{1}{2} \iint_{R-e_0} dx dy dx' dy' J^*(x, y; x', y'),$$

dans laquelle l'intégrale

$$(5) \quad J^*(x, y; x', y') = \iint \frac{dz dz'}{r}.$$

⁽¹⁾ L. Tonelli, *Sulla proprietà di minimo della sfera*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIX, 1915.

⁽²⁾ Sugli integrali multipli. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907.

est étendue aux deux ensembles linéaires de points E^* et $E^{*\prime}$ situés sur les deux droites $z(x, y)$ et $z'(x', y')$ et appartenant à l'ensemble E ; x, y et x', y' sont les coordonnées des points où les droites z, z' percent le plan x, y . Les ensembles $E^*, E^{*\prime}$ sont *mesurables*, à un ensemble e_0 de points x, y de mesure nulle près. R est un rectangle suffisamment grand et r la distance de deux points des droites z et z' .

Appelons \bar{K} le corps symétrique par rapport au plan des x, y que l'on obtient en remplaçant, sur chaque droite, z à un ensemble de mesure nulle près, l'ensemble E^* par un segment de longueur égale à $m(E^*)$ et de milieu situé sur le plan x, y .

On peut alors établir le

Théorème I: Le potentiel \bar{J} du corps \bar{K} n'est pas plus petit que le potentiel J de E . Il n'est égal au potentiel J que dans le cas, où l'ensemble E^* , situé sur la droite z , est déjà un segment S de milieu situé dans le plan x, y , à un ensemble linéaire de mesure nulle près, et à l'exception d'un ensemble de droites z qui donnent sur le plan x, y un ensemble de mesure nulle. Cela veut dire que l'on peut ajouter à E^* un ensemble E_0^* de mesure nulle et soustraire de E^* un autre ensemble de mesure nulle, $E_0'^*$. Sur un ensemble de droites de mesure nulle, E^* peut ou bien ne pas être mesurable ou, en étant mesurable, ne pas être un segment S de centre situé sur le plan x, y , à un ensemble linéaire de mesure nulle près. Dans tous les autres cas on a l'inégalité

$$(6) \quad \bar{J} > J.$$

3. Introduisons maintenant les définitions suivantes :

sphère S à un ensemble de mesure nulle près est un ensemble E des points d'une sphère à laquelle on a ajouté un ensemble E_0 de points de mesure nulle et de laquelle on a soustrait un autre ensemble E_0' de points de mesure nulle;

corps plein parfaitement symétrique à un ensemble de mesure nulle près est un ensemble E borné qui possède les propriétés suivantes : Si l'on envisage un plan π arbitraire de l'espace, il existe un plan (unique) de symétrie du corps π' parallèle à π . Ce plan π' possède par rapport au corps les propriétés du plan x, y par rapport à l'ensemble E du n. 2. Appelons un tel corps un *corps parfait*.

Le théorème I peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème I': Étant donné un corps K qui n'est pas un corps parfait à un ensemble de mesure nulle près, il existe un autre corps \bar{K} dont le potentiel \bar{J} est plus grand que celui du corps K .

On démontre ensuite sans difficulté le

Théorème II: Tout corps parfait à un ensemble de mesure nulle près est une certaine sphère à un ensemble de mesure nulle près.

Bien plus de difficultés présente la démonstration du

Théorème III: Le potentiel d'une sphère S de volume V n'est pas plus petit que le potentiel de tout ensemble E borné et mesurable de mesure $m(E) = V$.

D'après ce qui a été dit au n. 2, il suffit de démontrer le théorème III pour tous les corps K composés d'un nombre fini de polyèdres, que l'on peut supposer être des cubes. On symétrise, pour parvenir à ce but, le corps K alternativement par rapport à deux plans passant par un axe l contenant un angle α incommensurable avec π . On obtient un corps de révolution R de même volume que le corps K , mais d'un potentiel plus grand. En symétrisant ensuite ce corps par rapport à un second axe l' perpendiculaire à l'axe l et rencontrant cet axe (Tonelli, loc. cit.), on obtient une suite R_1, R_2, \dots de corps de révolution qui converge vers une sphère S déterminée. Cette sphère possède un potentiel au moins égal à celui de tout ensemble E .

Des théorèmes I', II, III résulte le théorème de Liapounoff:

Théorème IV: La sphère S à mesure nulle près de volume V possède un potentiel plus grand que celui de tout autre ensemble E de mesure $m(E) = V$ et borné.

Les considérations, qui conduisent à ce but, peuvent être employées pour établir un théorème analogue concernant les corps non homogènes, c'est à dire des ensembles E de densité $\varrho(P)$ fonction du point P de l'ensemble.

Matematica. — *Nuovo metodo di sommazione delle serie che ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OIDIO.

1. In una Memoria ⁽¹⁾, sintetizzata in una Nota di questi Rendiconti ⁽²⁾, trasformai il *metodo esponenziale* nel *metodo di Borel generalizzato* (o Bg) col duplice scopo, che credei raggiunto, di accrescerne la potenza e di far sì che alle serie sommabili fossero applicabili *incondizionatamente* quelle operazioni aritmetiche che erano applicabili solo ad una classe particolarissima di serie: le *assolutamente sommabili* del Borel. Ma in una recente Nota ⁽³⁾ ho riconosciuto che in realtà il secondo scopo avevo raggiunto solo in parte, nel senso che anche col nuovo metodo Bg l'applicabilità dell'ordinaria re-

(1) Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. XLII, 1917, pag. 303.

(2) Vol. XXVI, serie 5^a, 1^o sem., fasc. 11, pag. 603. La indicherò in seguito con N.

(3) In corso di pubblicazione nei Rend. del Circ. mat. di Palermo.

gola per la moltiplicazione delle serie rimane condizionata (come dirò al n. 3) ⁽⁴⁾.

In questa Nota mi propongo di riguadagnare ad usura il perduto, trasformando ancora il metodo esponenziale in un nuovo metodo *più potente del metodo Bg*, ed anche di quelli di Cesàro e di Eulero, e nel quale valgono *incondizionatamente tutte* le operazioni lecite sulle serie *assolutamente convergenti* ⁽⁵⁾.

A tale scopo conviene richiamare alcuni risultati.

2. Una serie

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

è (N, n. 1) *sommabile* (B, r) quando la serie

$$(2) \quad u^{(r)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (u_{n+r} = 0 \text{ se } n+r < 0)$$

è una trascendente intera e l'integrale

$$(3) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha) d\alpha \quad (\alpha \geq 0)$$

è convergente; allora la (1) ha per *somma* u questo integrale, aumentato di $u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1}$ se $r > 0$.

La (1) è *sommabile* Bg se (N, n. 2) è sommabile con qualcuno dei metodi così definiti:

$$(4) \quad \dots, (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \dots$$

3. Nella Nota cit. in ⁽⁴⁾, ho chiamato *assolutamente sommabile* (B, r) la (1) quando la convergenza di (3) è assoluta, ed ho dimostrato che *tutti* i teoremi enunciati nel n. 3 di N, *incluso il teorema V* relativo alla moltiplicazione ⁽⁶⁾, sussistono se in essi si premette la parola « *assolutamente* » alla parola « *sommabile* ».

Se si chiama *assolutamente sommabile* Bg una serie quando è assolutamente sommabile con qualcuno dei metodi (4) ⁽⁷⁾, si possono riassumere

⁽⁴⁾ In seguito a ciò vanno apportate a N alcune correzioni. Va soppresso il teor. V e la nota ⁽²⁾ di pag. 605, e la parola « *assolutamente* » nella linea 16 di pag. 604 e nelle linee 4 e 6 di pag. 606; poi nell'enunciato del teor. III va cambiato $r \leq s$ in $r \leq s$, e in quello del coroll. 2^o va cambiato n in $-n$. La parola « *assolutamente* » va anche soppressa dalla linea 7 della pag. 77 di un'altra Nota di questi Rendiconti (vol. XXVI, serie 5^a, 2^o sem., fasc. 4^o, pag. 77).

⁽⁵⁾ Inclusa la moltiplicazione. (È solo vietato di alterare l'ordine dei termini al di là di qualunque posto).

⁽⁶⁾ Da sopprimersi, giusta la nota ⁽⁴⁾.

⁽⁷⁾ Sono dunque particolari serie sommabili Bg; ma più generali delle assolutamente sommabili con tutti i metodi (4), considerato dal Borel.

i nuovi teoremi che così si ottengono, dicendo che *alle serie assolutamente sommabili Bg sono applicabili incondizionatamente tutte le operazioni lette sulle serie assolutamente convergenti* ⁽⁸⁾.

Poichè, per esempio, allora segue dal teor. V (modificato) che:

A) *Se due serie*

$$(5) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono assolutamente sommabili Bg ed hanno per somma u e v rispettivamente, anche la serie prodotto

$$(6) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \dots \quad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0)$$

è assolutamente sommabile Bg ed ha per somma w = uv.

4. Occorre anche richiamare qualche proprietà della serie di potenze

$$(7) \quad u + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots$$

considerata solo per i valori reali e non negativi di x .

B) *L'insieme dei valori (reali, non negativi) di x, per i quali la (7) è sommabile Bg, è un intervallo $(0, g)$, dal quale va forse escluso l'estremo g* ⁽⁹⁾.

Per ciascun x' di tali valori di x , la (7) sarà dunque sommabile (B, r) per qualche valore di r , e perciò ⁽¹⁰⁾ sarà assolutamente sommabile $(B, r-1)$ per tutti i valori x dell'intervallo $(0, x')$, tranne forse per $x=x'$. Ora, poichè ciò vale per ogni x' di $(0, g)$, vicino a g quanto si vuole, si conclude che:

C) *Per tutti i valori x di $(0, g)$, tranne forse per $x=g$, la (7) è assolutamente sommabile Bg.*

La somma $u(x)$ della (7), interpretata col metodo Bg, è dunque una funzione di x definita in $(0, g)$, tranne forse nell'estremo g . Essa gode di varie proprietà, fra le quali rilevo la seguente ⁽¹¹⁾:

D) *La funzione u(x) è continua in $(0, g)$, incluso g se ivi esiste, cioè se ivi la (7) è sommabile Bg.*

5. Tutto ciò premesso, passo a definire il nuovo metodo di sommazione annunziato nel n. 1, che indicherò con EBg, essendo una composizione del metodo Bg e di quello di Eulero.

⁽⁸⁾ Cfr. ⁽⁵⁾.

⁽⁹⁾ Ciò segue dal n. 15 di una mia Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIII, 1917, pag. 192.

⁽¹⁰⁾ Per un teorema del n. 3 di una mia Nota di questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5^a, 1^o sem., fasc. 2^o, pag. 98.

⁽¹¹⁾ Cfr. il n. 8 di una mia Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino (vol. LIX, 1918, pag. 171).

Dirò che una serie (1) è sommabile EBg quando la corrispondente serie di potenze (7) è sommabile Bg per $0 \leq x < 1$, ed inoltre esiste ed è finito il

$$(8) \quad \lim_{x=1-0} u(x) = u,$$

che allora chiamerò *somma* della serie (1).

Dai risultati del n. 3 e dai teoremi A e C, si deduce facilmente che

Alle serie sommabili EBg sono applicabili incondizionatamente tutte le operazioni (12) lecite sulle serie assolutamente convergenti (13).

Si ha per esempio: se due serie (5) sono sommabili EBg ed hanno per somma u e v rispettivamente, anche la serie prodotto (6) è sommabile EBg ed ha per somma uv .

Infatti, giusta l'ipotesi, le serie (7) e

$$v(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \dots$$

sono sommabili Bg per $0 \leq x < 1$, anzi lo sono assolutamente (per il teorema C); quindi (per il teorema A) si può asserire che la loro serie-prodotto formata con la legge (6), ossia

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots,$$

è pure (assolutamente) sommabile Bg per $0 \leq x < 1$ ed ha per somma $w(x) = u(x)v(x)$. Ma dall'ipotesi si ha inoltre

$$\lim_{x=1-0} u(x) = u, \quad \lim_{x=1-0} v(x) = v;$$

quindi è

$$\lim_{x=1-0} w(x) = uv.$$

Tutto ciò prova che la (6) è sommabile EBg ed ha per somma uv .

6. Per giustificare pienamente quanto ho asserito in fine del n. 1, resta da dimostrare che *il metodo EBg è più potente del metodo Bg e dei metodi di Cesàro e di Eulero*.

Ciò equivale a dire che *se una serie (1) è sommabile Bg o col metodo di Cesàro o con quello di Eulero ed ha per somma u , è pure sommabile EBg ed ha ugual somma (ma non viceversa)*.

Poichè il metodo di Cesàro è meno potente di quello di Eulero (14), basterà considerare quest'ultimo e Bg.

(12) Cfr. (5).

(13) Di questa importante proprietà già godevano il metodo di Cesàro (come era noto) e quello di Eulero (come ho dimostrato in una Nota di questi Rendiconti, t. XXVIII, serie 5^a, 1^o sem., fasc. 12, pag. 397).

(14) Cfr. la fine della Nota cit. in (13).

Se la (1) è sommabile con somma u col metodo di Eulero, vuol dire (15) che, per $0 \leq x < 1$, la (7) è convergente, quindi è sommabile Bg (N, n. 2), e che la sua somma $u(x)$ soddisfa la (8); e ciò prova che la (1) è anche sommabile EBg con somma u .

Dire che la (1) è sommabile Bg ed ha per somma u , è come dire che la (7) per $x = 1$ è sommabile Bg con somma u , e quindi (per il teor. B) è sommabile Bg per $0 \leq x \leq 1$. Ora la sua somma $u(x)$, che per $x = 1$ vale u , è funzione continua in questo intervallo, estremo 1 incluso (per il teor. D); quindi sussiste la (8). Ciò prova che la (1) è anche sommabile EBg con somma u .

Resta da dimostrare che una serie sommabile EBg non sempre è anche sommabile Bg o col metodo di Eulero. A tale scopo basta dare un esempio.

La serie di potenze (7) corrispondente alla serie numerica

$$(9) \quad 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n + \cdots$$

è

$$(10) \quad 1 - (1-i)x + (1-i)^2 x^2 - \cdots - (1-i)^n x^n + \cdots$$

e non è convergente per $0 \leq x < 1$ (ma solo per $0 \leq x < 1 : \sqrt{2}$); e ciò basta per concludere che la (9) non è sommabile col metodo di Eulero.

Poi la serie (2) corrispondente alla (10),

$$u^{(r)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{n+r} x^{n+r} \frac{\alpha^n}{n!} = (1+i)^r x^r e^{(1+i)x\alpha} \quad (16),$$

è trascendente intera in α per ogni x , e il corrispondente integrale (3) è

$$(11) \quad (1+i)^r x^r \int_0^\infty e^{(1+i)x\alpha - \alpha} d\alpha \quad (\alpha \geq 0).$$

Per $x = 1$ esso si riduce (a parte il fattore esterno) a $\int_0^\infty e^{i\alpha} d\alpha$, che è divergente; dunque la (10) per $x = 1$, ossia la (9), non è sommabile Bg.

Invece, per $0 \leq x < 1$ l'integrale (11) è convergente; anzi lo è assolutamente, perchè, sostituendo all'integrando il suo modulo $e^{x\alpha - \alpha}$, si ha un integrale convergente per tali valori di x . Dunque la (10) è sommabile (B, r) (per ogni r): quindi è sommabile Bg per $0 \leq x < 1$. La sua somma

(15) Per definizione. Cfr. la Nota cit. in (18).

(16) Escludendo il valore $x = 0$, se $r < 0$.

(che non dipende da r) è espressa (n. 2) dall'integrale (11) per $r = 0$, ed è perciò

$$u(x) = \int_0^\infty e^{(1+i)xz-\alpha} dx = \frac{1}{1-(1+i)x}.$$

Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = -i;$$

dunque la (9) è sommabile EBg (ed ha per somma $-i$), ma non lo è coi metodi di Eulero e Bg.

Chimica vegetale. — Sulle sostanze tanniche del « morus alba » (¹). Nota del dott. CARLO GHIRLANDA, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO.

In una Nota pubblicata or sono due anni, il prof. Pigorini si interessava della ricerca dei tannini negli organi del gelso, come quella che avrebbe fatto notevolmente progredire nelle conoscenze fisiologiche di questa pianta ancora così mal conosciuta nelle sue funzioni (²).

L'A. prese allora in esame gli organi legnosi del gelso e precisamente i rami (legno e corteccia), ma non poté giungere ad una conclusione precisa sulla presenza e tanto meno sulla quantità dei tannini per i risultati incertissimi che l'esperienza gli dette. Vedremo in questa Nota la spiegazione del fatto. Io ho ripreso lo studio della questione, facendo oggetto delle mie ricerche unicamente questo gruppo di sostanze e al riguardo la sua eventuale presenza e ripartizione nei diversi organi.

Non stardò a dilungarmi in superflue considerazioni sul valore della ricerca, ritenendo come, in un argomento ancora così mal noto sotto i punti di vista chimico e fisiologico, ogni nuova conoscenza, anche piccola, rappresenti un contributo apprezzabile per raccogliere quella massa di materiali che dovranno o prima o poi servire a chiarire interessanti fenomeni. Passo quindi senz'altro alla esposizione dei fatti.

Il metodo da me scelto e seguito per l'analisi è quello Löwenthal e Schröder; i materiali sono stati: le foglie, la corteccia dei rami, il legno dei rami, la corteccia della radice, il legno della radice.

Il materiale fresco, còlto nel gelseto annesso all'istituto, veniva immediatamente, dopo grossolano tagliuzzamento, immerso in acqua bollente in

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio della R. stazione bacologica sperimentale di Padova.

(²) L. Pigorini, *Prime ricerche sulla composizione chimica degli organi legnosi del gelso*. Atti R. ist. ven. sc. lett., LXXVI, parte 2^a, 1917, e Archiv. di farmacologia e sc. affini, an. XVI, vol. XXIII, anno 1917.

modo da evitare qualunque scissione, scomposizione od alterazione delle sostanze ricercate. Invece di far bollire le preparazioni, ho preferito di introdurre i recipienti, che le contenevano, in una pentola di Koch in cui, bolendo l'acqua sotto piccola pressione, si aveva una temperatura lievemente superiore a 100° C. Ho adoperato acqua distillata rinnovandola a brevi intervalli e a piccole frazioni, fino a scomparsa delle reazioni con percloruro di ferro e acqua di bromo e una volta di più. Sul liquido, rapidamente filtrato attraverso lana di vetro e quindi raffreddato in corrente di acqua, ho tosto proceduto alle determinazioni, seguendo le norme del metodo sopra detto.

Reazione con percloruro di ferro e acqua di bromo. — La reazione con percloruro di ferro negli estratti acquosi dà un colore bruno-verdastro intenso. Essa è positiva nell'estratto acquoso delle foglie e in quello della corteccia dei rami. È appena percettibile o negativa nell'estratto del legno dei rami, il che spiega appunto come il Pigorini abbia avuto, nell'esame complessivo di queste parti della pianta, gli incerti risultati che egli ha esposti con tutte le riserve. La reazione è positiva inoltre nella corteccia e nel legno della radice. Con l'acqua di bromo si è avuta reazione positiva, con precipitazione, pure in tutte le parti esaminate, eccetto il legno dei rami.

Queste reazioni, ottenute con percloruro di ferro e acqua di bromo starebbero a dimostrarci l'esistenza di tannini capaci di dare pirocatechina⁽¹⁾.

Constatate negli estratti acquosi dei diversi organi le reazioni che lasciano legittimamente supporre la presenza dei tannini, sono passato al dosaggio di questi.

Il metodo del dosaggio conferma la presenza, in quanto nell'eseguirlo si accerta che la polvere di pelle adempie la funzione, in questo caso caratteristica, di fissare una parte delle sostanze ossidabili col permanganato e cioè le tanniche. L'esperienza ha dato i risultati che si riassumono nella tabella seguente:

GELSO (<i>M. alba</i>)	%	Sostanza seccata a 100°	Sostanze tanniche	Sostanze tanniche
			in g. 100 di organi freschi	in g. 100 di organi secchi
Foglia colta al mattino	65,266	34.734	0,177 gr.	0,509 gr.
Foglia colta alla sera	64,193	35.807	0,149	0,417
Corteccia dei rami	61,196	38,804	0,081	0,209
Legno dei rami	—	—	tracce	tracce
Corteccia della radice	73,540	26,460	0,095	0,360
Legno della radice	69,195	30,805	0,036	0,119

(1) M. Nierenstein, *Darst u Nachweis d. Gerbst.* (in Abderhalden's Hdbch d. bioch. Arbeitsmeth., vol. 2°, pag. 996).

Da questa tabella si rileva che:

1) La quantità delle sostanze tanniche nei diversi organi del gelso è apprezzabile, fatta eccezione per il legno dei rami, nel quale, dato che se ne accumuli, ciò avviene in quantità non rilevabile.

2) Si susseguono, secondo il loro contenuto in tannino, in serie decrescente: le foglie, che ne contengono il massimo; la corteccia della radice, la corteccia dei rami, il legno della radice.

3) La foglia dei gelsi colta alla sera, secondo ricerche eseguite nella nostra Stazione, ha dimostrato il fenomeno che si verifica generalmente nelle foglie di tutte le piante verdi, e cioè l'accumulo di materiali organici sintetici nel corso della giornata, sotto la vivificante azione della luce solare. Nel caso speciale del tannino il risultato è stato invece che al mattino il quantitativo di questi si è mostrato sensibilmente superiore a quello riscontrato nelle foglie colte alla fine della giornata.

Ci è impossibile di penetrare sicuramente il meccanismo di tale fenomeno; solo potremmo tentarne una spiegazione riferendoci all'ipotesi di alcuni autori, i quali considerano le sostanze tanniche non come prodotti di assimilazione, bensì come prodotti secondari nei processi di sintesi degli albuminoidi⁽¹⁾.

Chimica vegetale. — Sulla formazione dell'amido nelle piante verdi. Nota di C. RAVENNA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Una Memoria di G. Pollacci *Sul carbonio delle piante verdi*⁽²⁾, che porta la data del maggio 1917, ma della quale potei prendere visione soltanto ora, contiene un esame critico riguardante l'utilizzazione dell'anidride carbonica e delle sostanze organiche già formate, per la via delle radici. Nel citare e riassumere, fra altri, i miei lavori sopra questi argomenti, l'Autore omette di rilevare alcune esperienze di controllo che potrebbero far apparire diminuita l'attendibilità di altre; stimo perciò opportuna una breve replica per mettere nella loro vera luce i fatti da me osservati.

L'autore della citata Memoria, trattando della mia ricerca *Sulla nutrizione delle piante verdi per mezzo di sostanze organiche*⁽³⁾, accetta la mia ipotesi, secondo la quale « le sostanze organiche fatte assorbire dai vegetali vengono nel loro interno completamente ossidate e l'anidride carbonica risultante, giunta nelle cellule clorofilliane, vi è fissata colla funzione

⁽¹⁾ M. Soave, *Chimica vegetale e agraria* (vol. I: *Chimica delle piante*. Torino, 1916).

⁽²⁾ Estratto dagli Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia, serie 2^a, vol. XVII, pag. 29 (gentilmente inviatomi dall'Autore).

⁽³⁾ Questi Rendiconti, XXV, I, 649 (1916).

“ normale ”. Questa supposizione ho disfatti suffragato con varie esperienze: e cioè ho osservato che, quando le piante vivono in soluzione nutritizia contenente glucosio, si forma nelle foglie l'amido anche in assenza di anidride carbonica, ma soltanto alla luce; che la regione dello spettro solare che ha la massima influenza per la formazione dell'amido nelle anzidette condizioni è quella stessa che ha la maggiore azione nella funzione clorofilliana; e infine che, coltivando le piante in soluzione zuccherina ed in atmosfera priva di anidride carbonica e di ossigeno, anche se esposte alla luce, non si forma nelle foglie l'amido. Il Pollacci, pure considerando logica la mia supposizione, toglie valore a quest'ultima esperienza perchè la pianta senza ossigeno si trova *in condizioni talmente anormali che è presumibile che il chimismo dei tessuti venga subito ostacolato.*

Senouchè, rendendomi perfettamente conto di questa possibile obiezione, avevo corredato l'esperienza con la opportuna prova di controllo che evidentemente passò inosservata al Pollacci. Si legge infatti nella mia stessa Nota: *Come controllo di questa esperienza e per meglio assicurarmi che l'assenza dell'amido non fosse dovuta ad uno stato di sofferenza delle piante per la mancanza di ossigeno, ponevo alla sera, contemporaneamente alle piante in esame, in un apparecchio uguale, un'altra pianta che tenevo, fino al pomeriggio del giorno susseguente, in atmosfera priva di ossigeno, ma formata, oltre che dall'azoto, da un poco di anidride carbonica. Nelle foglie delle piante così trattate ho ottenuto sempre, intensamente, la reazione dell'amido.* Le piante nelle anzidette condizioni stavano dunque per tutta una notte in atmosfera priva di ossigeno, e ciò malgrado, le foglie erano, il giorno successivo, in piena attività assimilatoria. Non mi sembra perciò che si possa affermare, per quanto riguarda il processo fotosintetico, che il chimismo dei tessuti venga *subito* ostacolato.

Nel commentare un'altra mia Nota in collaborazione con G. Bosinelli, *Sopra il supposto impiego dell'anidride carbonica assorbita per le radici nella fotosintesi clorofilliana*⁽¹⁾, il Pollacci fa osservare che le prove fatte in terreno naturalmente ricco di anidride carbonica non sono dimostrative perchè la ricerca dell'amido, che ci diede risultato negativo, fu eseguita solo macroscopicamente; e che le condizioni di esperienza in terreno innaffiato coll'acqua di Seltz formano un ambiente nocivo alla vegetazione.

Alla prima osservazione rispondo che la ricerca microscopica dell'amido fu da noi trascurata ad arte, in primo luogo perchè ci interessava soltanto di vedere se l'anidride carbonica potesse essere assorbita dalle radici e utilizzata dalle piante in misura praticamente apprezzabile, ed in secondo luogo perchè le tracce di amido svelabili soltanto al microscopio non avrebbero dato una dimostrazione stringente, potendo provenire da anidride carbonica

⁽¹⁾ Bios, vol. I, fasc. IV, pag. 403 (1913).

della respirazione, trattenuta dalla pianta. D'altra parte nelle nostre conclusioni non avevamo escluso che in piccola quantità l'amido potesse formarsi.

Alla seconda obiezione rispondo colle stesse parole della citata Nota mia e di Bosinelli, anche queste certamente sfuggite al Pollacci: *si eseguirono sempre le relative prove di confronto innaffiando anche le piante testimoni colla soluzione carbonicata; ciò per accertarci che la presenza di una quantità eccessiva di anidride carbonica a contatto delle radici non creasse alle piante tali condizioni di disagio da inibire la funzione clorofilliana. Il risultato non fu differente da quello precedentemente ottenuto, perché soltanto le foglie che potevano venire a contatto del gas carbonico dell'atmosfera diedero intensamente la reazione dell'amido, che fu negativa nelle altre.* Queste osservazioni, che si riferiscono alle esperienze colla piantaggione sono poi corredate nella stessa nostra Nota da fotografie che riguardano le altre piante sperimentate. Anche in questo caso dunque l'obiezione era già stata fatta da noi e l'avevamo trovata infondata.

Senza entrare nel merito delle esperienze eseguite dal Pollacci e descritte nella sua menzionata Memoria, ho ritenuto necessaria questa risposta ad una critica che avrebbe potuto condurre a valutare in modo non conforme al vero alcune mie esperienze.

Mineralogia. — Scisto a tremolite della stazione di Granara (Liguria) ⁽¹⁾. Nota di ELENA CARROZZA, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Il prof. C. De Stefani ha raccolto a Cà di Rossi, stazione di Granara (comune di Pegli - Liguria), una roccia che in vene e filoncelli traversa le serpentine del luogo, appartenenti alla zona detta degli scisti cristallini; ed ha voluto gentilmente a me affidarne lo studio.

L'aspetto del campione avuto in esame è quello di roccia fortemente laminata per scistosità, di colore verdognolo chiarissimo, con macchie giallastre limonitiche, specialmente alla superficie.

Tenerissima e untoosa al tatto, la roccia ha invero all'esame macroscopico aspetto di talcoscisto; ma, osservata in sezioni sottili al microscopic, risulta essenzialmente costituita da un anfibolo incoloro, o appena appena verdognolo, in masse fibrose e fibroso-raggiate e in prismi talora piegati e contorti ed essi stessi divisi in elementi fibrosi.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studi superiori di Firenze.

I prismi presentano strie di sfaldatura parallele all'allungamento loro, hanno rifrazione e potenza birifrattiva elevate, non mostrano pleocroismo anche in sezioni di un certo spessore e danno estinzioni massime di $c:E = 15^\circ\text{--}16^\circ$. Non è stato osservato nessun geminato.

Si tratta evidentemente di un termine più tremolitico che actinolitico.

Nella roccia è presente in piccola quantità il talco, come prodotto di alterazione superficiale dell'anfibolo.

Minerali del tutto accessori sono poi: la magnetite in granuletti, il leucoxeno minutamente granulare e l'apatite in prismetti bipiramidati.

L'analisi chimica (eseguita sotto la direzione del prof. E. Manasse) di questo scisto anfibolico, liberato per quanto è stato possibile dalle macchie limonitiche, ha fornito i risultati qui sotto esposti (I), che concordano abbastanza bene con quelli ottenuti da E. Manasse (II) per uno scisto a tremolite dell'isola di Gorgona⁽¹⁾, del tutto simile a quello da me studiato:

	I	II
Perdita per arrov.	4,39	2,42
SiO ₂	54,57	54,06
TiO ₂	tracce	—
Al ² O ₃	2,78	2,46
Cr ² O ₃	—	0,16
Fe ² O ₃ {		
FeO }	6,30	5,02
MgO	23,03	23,07
CaO	9,50	12,95
Na ² O	0,22	0,28
K ² O	tracce	0,12
P ² O ₅	0,15	—
	<hr/> 100,94	<hr/> 100,54

Da questi dati analitici risulta che il talco è nella roccia soltanto in piccola quantità, e che l'anfibolo è di tipo tremolitico, consistendo in gran prevalenza di $\text{CaMg}^3(\text{SiO}_4)^4$ e, in via subordinata, di molecole actinolitiche e forse anche di molecole di metasilicati ferrico-alcalini e allumino-alcalini.

Quanto alla genesi di una siffatta roccia, non è prudente pronunziarsi in base al solo esame microscopico e chimico del campione studiato; ma, ove si pensi che della zona da cui proviene tale roccia fanno parte le eufotidi, più o meno metamorfosate, e anche delle prasiniti, non mi sembra arrischiato il supporre che questo scisto a tremolite ci rappresenti, al pari di quello della Gorgona studiato da Manasse, una speciale *facies* rocciosa avutasi in seguito ad un processo di profonda metamorfosi subita dalle stesse rocce eufotidiche.

(1) E. Manasse, *Scisti a clinocloro, serpentina-scisti e scisti a tremolite dell'isola di Gorgona*. Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat., vol. XXVI, n. 5, Pisa 1917.

Mineralogia. — *Prainsite cloritica e quarzosa di Cà di Rossi (Pegli - Liguria)* ⁽¹⁾. Nota di DORA CURIAT, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

I campioni di questa roccia da me studiati furono raccolti dal professore C. De Stefani presso la stazione di Granara a Cà di Rossi (Liguria), nella zona detta degli scisti cristallini, in connessione coi gabbri situati alla base della formazione serpentinosa e presso il contatto con le rocce calcaree.

All'esame macroscopico la roccia apparisce scistosa e non uniformemente colorata a causa del prevalere dell'uno o dell'altro dei componenti essenziali. Ora assume colore verde per il grande predominio di elementi cloritici molto minuti, ora invece colore bianco-grigiastro per la sovrabbondanza di materiale feldispatico. Esternamente la roccia presenta delle patine giallognole dovute a prodotti limonitici di alterazione.

Lo studio microscopico svela che il minerale più abbondante è una clorite di tipo clinocloro, la quale si presenta in aggregati di piccole lamine, di squame, di listerelle, appena verdoline e quasi nulla pleocroiche, che mostrano una grande rassomiglianza col serpentino antigoritico, dal quale però si distinguono per il carattere ottico dell'allungamento loro, costantemente negativo. La rifrazione risulta assai più forte di quella del balsamo e la potenza birifrattiva più alta alquanto di quella offerta dalle cloriti di tipo penninie.

Altro minerale essenziale della roccia, sebbene alquanto scarso, è l'anfibolo, riferibile ad una varietà tremolitica, ma tendente lievemente all'actinoto, perchè spesso appena verdolina e non perfettamente incolora. Si presenta in prismetti allungati e anche in esili aciculi, fittamente intrecciati in modo irregolare fra di loro. Benchè il minimo spessore degli individui di anfibolo renda impossibile studiarne con esattezza le proprietà ottiche, pure lo riferisco ad un termine tremolitico-aetinolitico per il pleocroismo debolissimo, quasi nullo, in tinte verdi pallide e per l'angolo di estinzione massimo trovato di $c:\mathcal{E} = 18^\circ\text{-}20^\circ$.

Più abbondante dell'anfibolo è il feldispato in individui generalmente semplici, quasi a struttura microocellare come nelle tipiche prasiniti, limpidi, ma tutti ripieni di inclusioni di anfibolo, di clorite e anche di zoisite. Qualche lamina apparecchia geminata polisinteticamente secondo la legge del-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

l'albite, dando estinzioni simmetriche nella zona normale a $\{010\}$ di 15° circa. Da confronti col metodo di Becke risulta che la rifrazione di tale feldispato è nettamente inferiore sempre a quella del balsamo. Questo carattere e le estinzioni simmetriche di sopra ricordate lo fanno ritenere per albite. Come tale bisogna considerarlo anche in base ai dati dell'analisi chimica, che ha offerto una percentuale in soda di 2,70, di fronte ad un quantitativo in potassa minimo (0,24%) e ad un tenore in calce soltanto di 1,73%, nonostante che fra i minerali essenziali della roccia vi sia l'anfibolo tremolitico-actinolitico e vi sia pure, subordinatamente, della zoisite. La presenza delle piccole quantità di potassa potrebbe far supporre che in minima parte il feldispato fosse ortose; ma certo è che il feldispato caratteristico della roccia è l'albite.

Fra i componenti essenziali va annoverato anche il quarzo, che forma grossi granuli limpidissimi, con inclusioni fluide, a struttura saccaroides. La sua presenza spiega la forte acidità della roccia (54,53%) relativamente ad un termine prasinitico.

Non manca infine la zoisite in aggregati microgranulari, fortemente rifrangenti e a bassissimi colori di interferenza; ma essa è assai scarsa, come lo dice la bassa percentuale in calce ottenuta all'analisi; termini epidotici ferriferi non ho mai potuto riscontrare. Meno scarso è il leucoxeno che si presenta in masserelle granulari, grigie, semiopache a luce trasmessa e biancastre per riflessione. In qualche caso non è facile distinguerlo dagli aggregati di zoisite.

Minerale accessorio è l'apatite, di cui ho visto rarissimi prismetti piramidati. La mica bianca e la calcite mancano completamente.

Sparsa qua e là osservo qualche macchia limonitica, proveniente dall'alterazione dei minerali ferriferi.

L'analisi chimica eseguita sotto la direzione del prof. E. Manasse, ha dato i risultati qui sotto esposti:

Perdita per arrov.	4,97
SiO ²	54,53
TiO ²	1,02
Al ² O ³	14,74
Fe ² O ³ {	9,30
FeO	
CaO.	1,73
MgO	11,12
Na ² O	2,70
K ² O.	0,24
P ² O ⁵	tracce
	100,35

La roccia, in base ai caratteri microscopici e chimici, si avvicina assai alle prasiniti di molte regioni anche italiane (Alpi occidentali, Gorgona, Li-

guria stessa ecc.); prasiniti che, com'è noto, sono considerate in generale come il prodotto di metamorfismo di rocce gabbriche e diabasiche. Ma essa si distingue per non pochi caratteri dalle prasiniti tipiche: per la presenza del quarzo in quantità non scarsa, per un quantitativo maggiore di clorite (che è poi di tipo clinoclorico e non penninico, come ordinariamente si ha nelle prasiniti), per il tenore assai basso di zoisite e per la mancanza di termini epidotici.

Osservando l'alternanza degli elementi feldispatici e di quelli prevalentemente cloritici, si potrebbe sospettare che la roccia derivi da quei gabbri sottilmente laminati che si trovano talora nelle vicinanze, costituiti da zone alternanti di plagioclasio e di diallagio.

Che non si tratti di una tipica prasinite è dimostrato anche dalla sua composizione chimica, diversa da quella offerta da rocce ordinarie di tal tipo.

Qui appresso metto a confronto, per ciò dimostrare, l'analisi da me eseguita (I) con quelle riguardanti la prasinite antibolica della Gorgona (II) e quella cloritica, pure della Gorgona (III), analizzate da Manasse (¹); la prasinite di Rocca Bianca in Val di Susa (IV), analizzata da Zambonini (²); quella di Colletto di Trana a struttura zonata (V) e di Campo Ligure (Ovada) (VI), le cui analisi devonsi all'Aichino (³):

	I	II	III	IV	V	VI
Perdita per arrov.	4,97	4,05	3,46	3,46	2,52	2,09
SiO ²	54,53	47,03	46,04	47,11	50,38	51,71
TiO ²	1,02	0,38	0,40	0,41	1,32	0,91
Al ² O ³	14,74	16,47	18,28	19,15	17,65	14,75
Cr ² O ³	—	—	—	tracce	—	—
Fe ² O ³ {	9,30	3,81	4,00	3,06 {	10,02	12,48
FeO {	9,17	8,82	4,79 {			
MnO	—	—	—	0,22	—	—
CaO	1,73	7,38	7,18	9,69	10,95	6,39
MgO	11,12	6,77	7,71	9,88	4,77	8,42
Na ² O	2,70	4,24	4,19	2,52	2,52	3,48
K ² O	0,24	0,45	0,40	0,37	0,24	0,39
P ² O ⁵	tracce	0,09	0,05	tracce	—	—
	100,35	99,84	100,53	100,66	100,37	100,62

(¹) E. Manasse, *Le rocce della Gorgona*. Mem. Soc. tosc. Sc. nat., vol. XX, pp. 19-58. Pisa 1903.

(²) F. Zambonini, *Ueber den metamorphosierten Gabbro der Rocca Bianca im Susa-Tale*. N. Jahrb. für Min., Geol. und Paleont., Bd. II, pp. 105-134, Stuttgart 1906.

(³) Si confronti S. Franchi, *Contribuzione allo studio delle rocce a glaucofane e del metamorfismo, onde ebbero origine nella regione ligure-alpina occidentale*. Boll. Com. geol. d'Italia, vol. XXXIII, pp. 255 seg.; Roma 1902.

Le differenze analitiche si spiegano facilmente. Così, rispetto alle due rocce della Gorgona (e le stesse osservazioni potrebbero ripetersi presso a poco nel confronto delle altre prasiniti italiane, delle quali ho riportato le analisi), il maggior quantitativo in silice dell'esemplare di Cà de' Rossi è dovuto al quarzo, che è presente solo accessoriamente nelle due prasiniti della Gorgona; il più basso tenore in $\text{Al}^{\text{2+}}$, e soprattutto in CaO , deve attribuirsi alla searsità di minerali zoisitico-epidotici; viceversa, la più forte percentuale in MgO è imputabile all'abbondanza notevolmente maggiore del minerale cloritico, e il tenore un poco più elevato in $\text{TiO}^{\text{2+}}$ ad una maggiore diffusione del leucoxeno. Della percentuale più bassa di $\text{Na}^{\text{+}}$ non credo sia causa una minore quantità del feldispato albitico secondario (che, come sopra ho detto, è molto abbondante), ma piuttosto la mancanza del glauconite, antin-
bolo in parte sodico, assai diffuso nelle rocce della Gorgona.

Rappresentando il campione da me studiato solo una piccola parte della formazione rocciosa che ha subito il processo di metamorfismo, per il quale si originò anche la prasinite, per giungere a qualche conclusione circa la roccia madre da cui essa è derivata occorrerebbe studiare dal lato mineralogico e chimico tutto il complesso delle rocce connesse a questo tipo prasinitico, che ancora non ho potuto esaminare.

Paleontologia. — *Sui ramponi di laminarie fossili detti fucoidi, e sull'origine dei colloidì minerali di cui sono costituiti.*
Nota di G. ROVERETO, presentata dal Socio ARTURO ISSEL.

Nei lavori che fra il 1893 e il 1895 pubblicò il Fuchs⁽¹⁾ sui fucoidi del flysch eocenico, quelli dell'Appennino compresi, è posto ben in chiaro come gli stessi non possano rappresentare il tallo frondiforme di alghe, perchè attraversano parecchi piani di scistosità, e quindi di deposito, e hanno anche in molti casi una posizione addirittura verticale nella massa della roccia in istraterelli; la conclusione del Fuchs fu che tali fucoidi debbano essere delle gallerie tubolari fatte da animali nel fondo marino, e poi riempitesi elasticamente.

L'osservazione del Fuchs è esattissima, benchè fra noi sia stata tenuta in pochissimo conto; ma la spiegazione datane, a me, specialista di anellidi, risultava non ammissibile, soprattutto perchè le ramificazioni di tali fucoidi sono in modo ripetuto dicotome, come quelle delle alghe, nè elastico è il loro riempimento.

(1) Sitz. Akad. Wissensch. Wien, vol. CII, 1893; Berich. d. Comm. f. Erforsch. d. Oestl. Mittelmeeres, X, 1894; Denk. Akad. Wissensch. Wien, vol. LXII, 1895.

Credo di poter portare ora alcune nuove osservazioni su tale argomento.

Quando esploravo le spiagge della Patagonia, mi era frequente di raccolgere, portati dal mare, i fascetti di quelle false radici o ramponi, nel trattato di Oltmanns⁽¹⁾ chiamate *Krallen* oppure *Hafter*, esclusivi delle laminarie, e con i quali queste si fissano alle rocce, o penetrano nel fondo marino, irradiando verso il basso. La somiglianza di questi ramponi con i fucoidi del nostro eocene era grandissima; cominciai quindi a ritenere che i fucoidi debbano essere dei ramponi di laminarie, già formanti campi estesi come gli attuali, sul fondo fangoso del mare eocenico, e in questo immersi in senso più o meno verticale.

Per di più, siccome tali organi variano di forma a seconda dei generi, posso ora riconoscere differenti correlazioni fra i generi o le specie dei fucoidi e quelli delle laminarie. Così, mentre il *Chondrites inclinatus*, ad esempio, è quello che più di ogni altro ricorda i ramponi delle *Macrocystis* di Patagonia, il *Ch. reflexus*, come è figurato in Issel⁽²⁾, somiglia ai ramponi ad uncino di altra laminaria dei mari nordici, ramponi di cui ho visto un esemplare indeterminato nelle collezioni dell'Istituto botanico di Genova.

Studiati al microscopio, i fucoidi dell'eocene non presentano struttura organica; solo di rado contengono piccoli grumi di sostanza carboniosa, che si distrugge col liquido di Schultz (acido nitrico e clorato di potassio); ancor più raramente hanno tracce di un rivestimento carbonioso, rappresentante la membrana del rampone. In grande prevalenza sono invece formati da una materia di color bruno in inassa saponacea al tatto, non fusibile al cannello, o fusibile difficilmente, della quale, per la gentile collaborazione di Alberto Pelloux, posso dare la seguente descrizione.

In sezione debitamente sottile questa materia è incolore e trasparente, colloide e isotropa, salvo delle piccole lamelle a contorno esagonale, di rifrazione media. Contiene piccola quantità di calcite, e frequenti opaciti ferruginose. In sezioni meno sottili la materia è opaca o quasi, e se ne aumenta la trasparenza, pennellandola a poco a poco con acido cloridrico diluito.

Applicato il metodo di colorazione con aniline suggerito dal Grandjean⁽³⁾, si riconosce che le sezioni sottili del calcare marnoso ricettante i fucoidi si colorano nelle loro parti argillose, e rimangono incolore in quelle calcitiche, mentre i fucoidi assumono una leggera tinta giallastra solo lungo la periferia, dove si può supporre che esistesse la guaina vegetale.

Trattando in massa, con acido cloridrico bollente, dalla materia dei fucoidi si separa della silice colloide, e, dopo la neutralizzazione con am-

(¹) Oltmanns, *Algen*, vol. 1^o, pag. 425.

(²) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXV, 1906, pag. 46 (estratto).

(³) Bull. Soc. Fr. de Minér., vol. XXXII, 1909, pag. 408.

moniaca, si ha un precipitato alluminoso-ferrifero, che si comporta come quello delle *terre rosse* a elementi colloidì. Con acido solforico si ha la separazione della silice colloide, e una colorazione bruna come quella dovuta a idrato ferrico.

È quindi probabile che si tratti di un idrossido d'alluminio, accompagnato da acido silieico e da sali di ferro, tutti colloidì, i quali, assorbiti dalla membrana dei ramponi, siansi concentrati in vario modo e accumulati nell'interno del rampone, cui avrebbero conferito maggior peso e consistenza: forse non è fuor di luogo dare a questo nuovo composto di assorbimento il nome di *fucoidite*.

Ciò corrisponde alle risultanze di alcuni recenti studi fatti sulla proprietà di assorbimento delle membrane colloidali di alcune piante. Nel 1910 Baumann e Gully hanno riconosciuto come la membrana cellulare dello sfagno abbia la proprietà di scindere i sali e di metterne in libertà gli acidi, e ciò, non a causa delle sue qualità acide, ma esclusivamente per la sua condizione colloidale⁽¹⁾. Wieler ha più di recente esteso questi risultati ad altre membrane cellulari di piante superiori, e propende a credere che tutte abbiano la proprietà di tale scissione⁽²⁾.

È notevole che l'analisi qualitativa riveli in tutti una quantità più o meno abbondante di acido fosforico, il quale certamente deve essere combinato con il calcio; tanto più, che pur essendo ben sensibile la reazione del calcio, poco lo è quella dell'anidride carbonica. Questa facilità di assorbimento dell'acido fosforico non so se possa essere caratteristica, e ignoropure, per la poca quantità del materiale disponibile, quali sono gli alcali che l'accompagnano.

Il riempimento colloide poteva avvenire solo essendo l'alga viva; ma quando si ha un riempimento elastico — caso eccezionalissimo nel flysch eocenico, di cui nel museo di Genova esiste un solo esempio, proveniente dalle cave di Albaro — bisogna credere che i ramponi fossero pervii per morte, o perchè lacerati. Non è colloide, né elastico, un riempimento calcítico che si osserva in un rampone penetrato nel calcare corallino dell'oligocene di Varazze, e per notevole eccezione in questo caso la membrana esterna è ancora conservata sotto la forma di un velo carbonioso: è quell'alga cui ho dato il nome, forse inutile, di *Metacodium obtusum*⁽³⁾.

Allo stesso modo sono rari i casi, nell'eocene ligure, in cui la materia colloide non sia la fucoidite che ho ora descritta: la più notevole eccezione si trova a Costa d'Oneglia, dove i fucoidi, assai belli e assai frequenti, sono costituiti da una materia friabile di colore giallo, che si fa subito rubefatta

(1) Cfr. Jost L., *Vorlesung über Pflanzenphysiologie*, pag. 121, 1913.

(2) Ber. Bot. Ges., vol. XXX, 1912.

(3) Rovereto G., *Nuovi studi sull'oligocene*, pag. 98, 1914.

in tubo chiuso, fusibile al cannello, solubile negli acidi con viva effervescenza, in ispecie se a caldo, materia che ritengo siderite colloide, alquanto limonitizzata⁽¹⁾.

Si può anche aggiungere, che differenze più o meno notevoli debbono presentare i componenti le fucoidi di altri terreni ed età, quando abbiano prosperato in fondi i quali non fossero nelle condizioni chimiche, termiche e floristiche di quelli dell'eocene. Ad esempio, i fucoidi delle marne argillose rosso-vinate, del lias superiore dell'Appennino centrale (secondo campioni del M. Catria favoritimi dal prof. Principi) sono di un colore rosso un poco più scuro di quello della roccia, e, trattati con acido solforico bollente, producono, durante l'ebullizione, un precipitato bianco fioccoso di silice gelatinosa, come se si trattasse di vera argilla amorfa. I *Chondrites* descritti dallo Squinabol, del pliocene dei pressi di Genova, hanno invece all'aspetto la stessa composizione di quelli eocenici.

Il non essere presenti i fucoidi nelle rocce argillose, ma solo nei calcari argilosì, fa credere, che l'influenza posseduta dalla calcite sulla decomposizione dei sali d'alluminio possa nei fanghi calcarei, favorire la preparazione di quei composti di assorbimento, tra i quali l'idrato di alluminio ha una notevole preponderanza.

È certo che una nuova ricerca di idrogeli colloidali è aperta, e che si intravvede una nuova ipotesi per spiegare i colloidì delle terre rosse.

Aggiungeremo che molti generi di fucoidi, di cui sino ad oggi poco si è compreso, con i fatti esposti risultano chiaramente spiegati. Così *Taenidium* (*Munsteria* in Squinabol p. p.) constava di ramponi a irregolari restringimenti anulari, e ne posso un campione del flysch ligure, in cui le varie diramazioni irradiano da un'asticciola centrale, che nella parte superiore non è più di fucoidite, ma di solfuro di ferro, a dimostrare che in questo tratto cessava il potere di assorbimento colloidale.

Nessuno è riuscito a dare una spiegazione verosimile dei curiosi *Bostricophyton*⁽²⁾; ora risulta, che erano ramponi forniti da una membrana ad anelli non assorbenti, di cui non esiste più traccia, alternati con altri assorbenti, i quali sono i conservati. *Chondropogon*, altro bel fucoide descritto dallo Squinabol, aveva i suoi ramponi tutti finamente cigliati o barbati.

Più difficile a interpretarsi è *Halymenites* come è figurato in Fuchs⁽³⁾; si direbbero tanti piccoli ramponi compresi come in una guaina, che, in un esemplare da me posseduto, è dicotoma. Heer⁽⁴⁾ ha invece figurato un *Halymenites* terminante in un *Chondrites intricatus*; con esso si colle-

(¹) Un caso di siderite colloide è stato segnalato in una torbiera. Cfr. Cayeux L., *Étude pétrographique des roches sédimentaires*, pag. 226, an. 1916.

(²) Cfr. Squinabol in Atti Soc. Ligustica, vol. I, pag. 182, an. 1890.

(³) Denk. Akad. Wien, vol. LXI, 1894.

(⁴) Heer O., *Flora fossilis Helvetiae*, tav. LVIII, fig. 1.

gano numerose forme del secondario (ad es. *Gyrolithes* e *Siphodendron*), con le quali nulla di vivente si può per ora paragonare.

La *Caulerpa* terminante in un chondrite, figurata dall' Ettingshausen (¹); la *Caulerpa filiformis* figurata dal Maillard (²) e terminante nel *Ch. arbuscula*; lo *Zoophycos insignis* dello Squinabol collegato a un *Chondrites affinis*, rappresentano evidentemente la parte frondiforme del tallo. Lo *Zoophycos* di Squinabol ricorda per di più il vivente *Thalassiophyllum clathrus* (³), che è una laminaria; dei *Thalassiophyllum* erano quindi con tutta probabilità i *Chondrites* eocenici del gruppo *Ch. affinis*. Altri *Zoophycos* sono essi stessi dei ramponi fogliosi.

Botanica. — *Su un musco cavernicolo crescente nell'oscurità assoluta.* Nota del dott. G. NEGRI, presentata dal Socio O. MATTIROLO.

1. Dal chmō prof. O. Mattirolo ho ricevuto in cortese comunicazione un esemplare di musco, facente parte di una collezione di vegetali cavernicoli, portata all'Orto botanico di Torino dall'attivo e sagacissimo raccoglitore, soldato Martino Maccagno. Tale campione è stato raccolto (il 16 novembre 1919) nella grotta di Trebiciano (Trieste) (⁴) e precisamente sul pendio sabbioso della caverna Lindner, a 275 m. di profondità, alquanto al disotto dell'orificio dell'ultimo pozzo. Il semplice esame del piano e dello spaccato, che accompagnano la memoria citata, permette di escludere qualunque possibilità di permeazione luminosa sino al punto in questione. La discesa infatti vi avviene per quindici pozzi successivi, sviluppati lungo uno slivello di m. 273,55, angusti, tortuosi, non sempre contigui fra di lorō, ed intercalati anzi da due cavernette minori, nella seconda delle quali il ritrovamento della via precisa di discesa al fiume offrì notevole difficoltà ai primi esploratori. Nella caverna Lindner la temperatura dell'aria risulta in media di + 14° C, oscillando fra + 11° e + 16° C. L'acqua, con una temperatura variante fra + 7° e + 13° C, s'innalza durante le piene sino all'orificio inferiore dei pozzi ed anche più su: anzi, il Maccagno ha potuto rilevare le tracce di una recente inondazione, la quale aveva raggiunto ed oltrepassato il punto di raccolta del musco; onde presenta la maggiore probabilità l'ipotesi della disseminazione della spora dalla quale esso ha avuto origine, da parte di

(¹) Ettingshausen C., *Die fossilen Algen ecc.*, tav. fig. 4, an. 1863.

(²) Mem. Soc. Paléont. Suisse, vol. XIV, 1887.

(³) Ved. Oltmanns, loc. cit., vol. I, pag. 440, fig. 269.

(⁴) Boegan E., *La grotta di Trebiciano* (Alpi Giulie, anni 1909-1910); estratto Trieste, 1910.

un esemplare sporifero maturo proveniente dall'esterno ed aderente a qualche frammento di legno facente parte del *drift* del torrente sotterraneo.

L'esemplare raccolto, disgraziatamente unico, è costituito da un caulinino esilissimo, lungo 47 mm., ascendente, portante numerose e piccole foghe (mm. 80 × 32) piuttosto distanziate, eretto-patenti, semiamplessicauli, ma non decorrenti, non seconde, un po' concave, ovali apiculate, a margine appianato ed intero. La nervatura è mancante od esilissima e raggiunge, in tal caso, scarsamente la metà della foglia. I caratteri delle cellule fogliari finalmente, uniformemente allungate e flessuose, senza differenziazione sicuramente riconoscibile in corrispondenza degli angoli basilari, autorizzano, malgrado la deformazione dovuta alle inconsuete condizioni di stazione, la diagnosi di *Isopterigium Muellerianum* (*Schpr.*) Lind.

Questa specie è stata raccolta in varie località della zona submontana delle Prealpi Giulie e, secondo l'indicazione dello stesso descrittore, « *loca excavata soli impervia amat* »; anzi, « *in locis obscuris plantae proveniunt e solis fere surculis filiformibus microphyllis compositae* »⁽¹⁾. La coincidenza di portamento fra la forma obscuricola in questione e questo normale adattamento a condizioni di penombra è interessante; vi si può del resto riscontrare un parallelismo con la *forma cavernarum* registrata da Lämmermayr per l'*Isopterigium depressum* (*Bruch*) Mitten, senza che tuttavia si possa pensare ad una identificazione, pel contorno meno apiculato, spesso addirittura ottuso delle foglie di quest'ultimo, la denticolatura più o meno evidente, specialmente nella porzione superiore, del loro margine e le cellule quadrate o rettangolari, poche ma costanti, agli angoli basilari. Però, anche indipendentemente dal fatto del possedere un solo esemplare, ritengo inopportuno di designare con nome speciale un abito strettamente condizionato a circostanze eccezionali d'ambiente, variazione convergente di specie diverse e che implica uno sviluppo incompleto ed una assoluta sterilità. Quanto alla colorazione, le foglie sono scolorate, con cellule uniformemente ialine. Invece il caulinino è verde, più intensamente nella metà inferiore o nuovamente verso l'apice: ed isolandone qualche cellula mediante dilacerazione, è facile di osservare in essa numerosi e minutissimi granuli clorofillini.



2. Ho stimata interessante la comunicazione di questo eccezionale reperto di un musco vegetante in una stazione completamente oscura, perchè il caso non trova riscontro se non in condizioni sperimentali. De Forest

⁽¹⁾ Glowacki J., *Die Moosflora der Julischen Alpen*, pag. 43 (Abhandl. d. k. k. Zool.-Bot. Gesellsch. in Wien, Bd. I, Heft 2, anno 1910); Schimper W. Ph., *Synopsis muscorum europaorum* (ed. 2^a, vol. II, pag. 699. Stuttgardiae, 1876).

Heald (¹) ha infatti ottenuto nel 1898 la germinazione di spore di muschi in assenza completa di luce su substrati contenenti composti organici, peptone od ancor meglio zucchero: in culture accuratamente sterilizzate individui del genere *Funaria* poterono essere conservati in queste condizioni per parecchi mesi. In particolare i caulinici sviluppatisi così all'oscurità, si presentano di colore verde vivace, le loro cellule contenendo granuli clorofillini piccolissimi e per lo più accumulati in un punto, rimanendone privo il resto della cellula; la clorofilla si addensa nella zona apicale, che ne risulta intensamente verde; le minute foglioline sono affatto trasparenti, di un verde pallidissimo e con cellule per lo più del tutto ialine, od eccezionalmente contenenti, presso la base delle foglie, alcuni granuli clofotillini.

Non mancano del resto nella letteratura osservazioni di organismi verdi, appartenenti ad altre classi, sviluppatisi spontaneamente al buio e con formazione di clorofilla. E si prescinde qui da quanto si riferisce a vegetali viventi a forte profondità nelle acque dolci o salse (tale *Halosphaera viridis* Schmit pescata nel Mediterraneo fra 1000 e 2000 m. durante la crociera del Plankton, 1890), poichè per essi il problema è reso più complesso dalla selezione delle radiazioni luminose esercitata dallo strato d'acqua sovrastante. Così Maheu (²) osserva che, specialmente fra le alghe, esistono piante verdi capaci di adattarsi all'oscurità assoluta delle stazioni cavernicole più profonde, conservando la loro clorofilla (*Protococcus*, *Nostoc*). Anche sperimentalmente del resto Bouillac, Radais, Artari ed altri, hanno potuto ottenere e seguire lo sviluppo di alghe verdi al buio. Inoltre Maheu, nel corso delle sue lunghe ed estese esplorazioni delle caverne francesi e di alcune italiane, ha incontrato, anche nell'oscurità totale, e naturalmente allo stato sterile, licheni (*Artropyrenia chlorotica* Schaer var. *olivacea* Borr, e *Verrucaria rupestris* D. C., f. *amylacea* Huepp) nonchè felci (*Polypodium vulgare* L.) e persino fanerogame (*Avena sativa* L. e *Potentilla verna* L.), queste ultime tuttavia scolorate, quantunque neppure per piante superiori (gimnosperme) manchino dati sperimentali di germogli verdi ottenuti nell'oscurità (Molisch, Burgerstein).

È mancato invece sinora, nelle stazioni completamente oscure, il reperto di muschi, benchè essi raggiungano una proporzione predominante nella vegetazione della parte alta delle caverne e possiedano note forme di caratteristico adattamento alla penombra (*Schistostega osmundacea* W. M.). Al disotto di un certo grado di luminosità il loro numero decresce rapidamente, tanto che sono poche le specie e scarsi gli esemplari che vi si adat-

(¹) De Forest Heald (Fred.), *Conditions for the germination of the spores of Bryophytes and Pteridophytes*, Botan. Gaz., XXVI (1898), pag. 25-45; *A study of regeneration as exhibited by mosses*, ibid, pag. 169-212. Cfr. anche Bittner K., *Ueber Chlorophyllbildung im Finster bei Kryptogamen*, Oesterr. Botan. Zeitschr., LV (1905), pag. 305.

(²) Manheu J., *Contribution à l'étude de la flore souterraine de France*. Ann. des sc. nat., ser. IX, botanique, III, pag. 1-189, con ricchissima bibliografia sull'argomento.

tano. Così le diligenti determinazioni fotometriche dal Lämmermayr (¹) nelle caverne delle Alpi Orientali ci indicano come casi di tolleranza estrema l'*Isoptericium depressum* (Bruch) Mitten e la sua *forma cavernarum* per sta-

zioni con $L = \frac{1}{1380}$ (?) (Wiesner) ed $\frac{1}{1200}$ (?); nonchè una trentina di altre specie raccolte entro un limite di $L = \frac{1}{1000}$. Anche Maheu, distinte nelle ca-

verne francesi quattro zone di luminosità decrescente, delle quali l'ultima sola completamente oscura, rileva come i muschi, in nessun caso si spingano oltre la terza. La specie più tollerante è il *Fissidens adianthoides* Hedw.

Quanto alle condizioni speciali che possono aver favorito lo sviluppo dell'esemplare in questione, può esser ricordata la probabile ricchezza del terreno in materiali organici. Il Maccagno notò infatti, in prossimità del punto di raccolta, un cassone abbandonato; e lo studio del Boegan menziona la frequenza, sul pendio sabbioso della caverna Lindner, di coleotteri, evidentemente mantenutivi dalla possibilità di nutrirvisi di detriti organici. Il Maheu inoltre (loc. cit. pag. 89) ritiene che la ricchezza del substrato in sali di calcio (è il caso nostro) aumenti la resistenza dei muschi all'oscurità.

(¹) Lämmermayr L., *Die grüne Pflanzenwelt der Höhlen* (Denkschr. d. k. Akad. d. Wissenschaften, Math-naturwiss. Klasse, Bd. LXXVIII. Wien., 1912, pp. 325-364).

G. C.